

# DRAFT

## Методика определения справедливых цен рублевых облигаций российских эмитентов

Данный документ содержит в себе описание методики определения справедливых цен рублевых облигаций российских эмитентов. Методика разработана Центром Экономического Анализа ЗАО «Интерфакс» по заказу НКО АО «Национальный расчетный депозитарий» в рамках комплекса работ по созданию Ценового центра.

Коллектив авторов:

*Алексей Буздалин, заместитель директора Интерфакс-ЦЭА*

*Андрей Заночкин, аналитик Интерфакс-ЦЭА*

## Содержание

1. Общие положения .....	3
2. Каскад методов определения справедливых цен .....	5
3. Оценка активности торгов облигаций .....	7
4. Модель взаимосвязи цен облигаций с облигационными индексами .....	8
5. Метод фактических цен .....	11
6. Метод экстраполяции индексов .....	15
7. Метод факторного разложения цены .....	19
8. Перечень основных обозначений.....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Оценка базовой кривой доходности .....	28
Термины и определения.....	28
Общие понятия .....	28
Срочная структура процентных ставок.....	28
Функция ядра $Z$ .....	29
Матрицы и векторы.....	29
Порядок формирования базы расчетов .....	30
Непараметрическая модель .....	30
Функциональная постановка.....	30
Вероятностная постановка.....	31
Обработка данных .....	31
Матричное представление данных .....	32
Расчет непараметрической модели.....	34
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Классификатор отраслей.....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Сопоставление шкал рейтинговых агентств и вероятности дефолта .....	37
«ИНТЕРФАКС-ЦЭА» .....	38

## 1. Общие положения

- 1.1. Данный документ содержит в себе описание Методики определения справедливых стоимостей рублевых облигаций, выпущенных российскими эмитентами, за исключением ипотечных облигаций.

Определенные в соответствии с данной Методикой справедливые цены облигаций предназначены, прежде всего, для использования в нуждах подготовки финансовой отчетности, а также для оценки облигаций, принимаемых в обеспечение при сделках междилерского РЕПО и РЕПО с Банком России.

Методика не предназначена для определения цен облигаций в нуждах риск-менеджмента в той его части, где требуется анализировать волатильности финансовых инструментов, т.к. определяемые значения справедливых стоимостей облигаций не включают в себя специфичности волатильности облигаций относительно общей волатильности рынка.

- 1.2. Под справедливой стоимостью облигации понимается такая ее стоимость на определенную дату, по которой ее можно реализовать при совершении сделки между хорошо осведомленными, желающими совершить такую сделку и независимыми друг от друга сторонами (условия эффективного рынка).

Важно подчеркнуть, что определение справедливой стоимости облигации производится без учета влияния на нее объема совершаемой контрагентами сделки. Так, чем больший объем бумаг продается, тем, как правило, ниже цена облигаций в заключаемой сделке, что объясняется влиянием ликвидности инструментов. Учет данного эффекта является самостоятельной задачей, выходящей за рамки данной Методики.

Таким образом, под справедливой стоимостью облигации понимается ее стоимость при совершении сделки минимального объема в условиях эффективного рынка.

- 1.3. Выбор совокупности исключительно рублевых облигаций российских эмитентов для определения справедливых цен инструментов обусловлен, прежде всего, спецификой доступной информации, необходимой для применения данной Методики. Так, ключевой информацией для определения справедливых цен являются данные очередей торговых заявок в секции фондового рынка Московской биржи.

Решение ограничиться при оценке справедливых стоимостей статистикой биржевых торгов без привлечения ценовой информации с внебиржевого рынка обусловлено двумя причинами. Во-первых, биржевая статистика в гораздо меньшей степени подвержена фальсификации и манипуляции со стороны участников рынка, что повышает надежность итоговых оценок справедливых цен. Во-вторых, для российского рынка облигаций свойственно то, что, в отличие от рынков стран Западной Европы и США, значительная доля операций с ликвидными инструментами заключается в режиме биржевых торгов, что делает биржевую статистику достаточной для оценки стоимостей основного количества ликвидных инструментов. При этом неликвидные облигации, вне зависимости от того где совершаются с ними сделки (на бирже или на OTC-рынке), требуют использования факторных

моделей оценки стоимости, без привлечения ценовой статистики сделок с ними.

- 1.4. Для определения справедливой стоимости облигаций предлагается использовать каскад методов (метод фактических цен, метод экстраполяции индексов, метод факторного разложения цены). Выбор одного из трех методов обусловлен значениями показателей активности торгов с оцениваемой облигацией. Чем более активно участники рынка совершают сделки с облигацией, тем в большей степени достоверна (наджна) статистика торгов и тем в большей степени информация торгов задействована в определении справедливой стоимости бумаги.
- 1.5. Ключевым элементом определения справедливых стоимостей облигаций является определение их ликвидности. Понятие ликвидности облигаций имеет разные значения и по-разному используется в различных частях данной методики. Так, для определения степени достоверности биржевых котировок оцениваемой облигации необходимо оценить степень активности торгов данной бумагой. Таким образом, в данном случае ликвидность проявляет себя в виде показателя активности, который в свою очередь зависит от ряда показателей биржевой статистики (частота сделок, объем сделок, размер торгового спреда).

При этом для оценки справедливой стоимости облигации в рамках метода факторного разложения цены возникает задача учесть премию за ликвидность, как один из компонентов цены. В данном случае ликвидность может вообще не зависеть от активности торгов выбранной облигации, отражая в первую очередь восприятие рынком кредитного качества эмиссии. В качестве примера можно привести выпуски облигаций крупнейших государственных компаний, размещённые «в одни руки». Реальные сделки с такими облигациями отсутствуют, но на рынке имеется большое количество агентов, готовых купить данные облигации с минимальным торговым спредом. Для оценки премии за ликвидность в факторной модели предлагается использовать концепцию вмененной ликвидности, основанную на анализе статистики структуры владения облигацией по данным Национального расчетного депозитария.

- 1.6. Использование ценовой информации о биржевых сделках имеет важный нюанс, который также связан с ликвидностью облигаций. Так, при совершении сделки на бирже заявка покупателя (продавца) облигации, как правило, реализует сразу несколько встречных заявок в очереди торговых заявок. При этом после завершения операции цена облигации зачастую через некоторое время возвращается на уровни, предшествующие совершенной сделке, т.е. наблюдается эффект «релаксации» рынка, являющейся особенностью проявления ликвидности облигации. В этой связи для нивелирования эффекта релаксации рынка под стоимостью совершенной на бирже сделки предлагается понимать наилучшую цену предложения (спроса) в очереди торговых заявок на момент, предшествующий сделке.
- 1.7. Важным элементом определения справедливой стоимости облигации в рамках метода факторного разложения цены является учет кредитного качества эмиссии. Расчет премии за кредитный риск в стоимости облигации предлагается построить на значениях кредитных рейтингов (эмиссий, эмитентов, поручителей), публикуемых рейтинговыми агентствами.

Большинство облигаций, российских эмитентов и 99% облигаций, входящих в ломбардный список Банка России, имеют рейтинги «большой тройки» международных рейтинговых агентств, что позволяет корректно оценить для таких облигаций их справедливые стоимости в рамках метода факторного разложения цены. Вместе с тем, для распространения данного метода на общее количество бумаг потребуется получения оценок кредитного качества эмиссий без использования данных рейтинговых агентств. Такая задача может быть решена за счет построения модели кредитного скоринга на данных финансовой отчетности эмитентов. Однако в предлагаемой Методике определения справедливых цен эта задача не решается.

- 1.8. Основой для расчета справедливых цен облигаций в данной Методике являются значения базовой кривой доходностей (бескупонных доходностей ОФЗ). Эта кривая строится на основе модели сплайнов Смита-Уилсона. Выбор данной модели обусловлен лучшей устойчивостью кривой в ситуациях высокой волатильности рынка, а также большей ее согласованностью с динамикой доходностей корпоративных облигаций, на фоне альтернативных моделей расчета разовых доходностей.

## 2. Каскад методов определения справедливых цен

- 2.1. Определение справедливой стоимости  $P_i(t)$  для  $i$ -ой облигации в день  $t$  и интервала допустимых значений цены  $[D_i(t); U_i(t)]$  основывается на применении каскада из трех методов:

- 1) метод фактических цен;
- 2) метод экстраполяции индексов;
- 3) метод факторного разложения цены.

Каждый из трех методов предполагает расчет на его основе справедливой стоимости:

$$P_i^j(t), j = 1, 2, 3,$$

а также интервала допустимых значений цены:

$$[D_i^j(t); U_i^j(t)], j = 1, 2, 3.$$

Выбор одного из трех методов для определения справедливой цены обусловлен степенью достоверности ценовой информации по сделкам, совершаемым с данной бумагой на бирже.

Метод фактических цен применим в том случае, если в течение дня  $t$  на бирже были совершены сделки с данной облигацией, параметры которых свидетельствуют в пользу их достоверности (надежности). Под достоверностью сделки понимается соответствие ее условиям эффективного рынка. В такой ситуации справедливая стоимость облигации определяется равной средневзвешенной цене достоверных сделок.

Метод экстраполяции индекса применяется в ситуации, когда в течение дня  $t$  на бирже не было сделок, которые можно признать достоверными, однако в относительно недавнем прошлом такие сделки были зафиксированы, что позволяет, сопоставив их параметры со значениями облигационных индексов

на момент времени  $t$ , определить справедливую стоимость облигации с допустимой точностью.

Метод факторного разложения цены применяется в ситуации, когда не применим ни один из первых двух методов. В такой ситуации справедливая стоимость облигации определяется как сумма базовой процентной ставки и ряда дополнительных факторов, характеризующих особенности данной эмиссии или эмитента (кредитный риск, ликвидность, отрасль), а также общерыночную конъюнктуру. При этом ценовая информация о сделках с данной облигацией не используется.

2.2. Для определения формализованных правил выбора метода определения справедливой цены необходимо задать следующие управляющие параметры Методики:

- $\theta$ - доверительная вероятность, определяющая интервалы допустимых значений справедливых цен (рекомендуется положить  $\theta = 0,95$ );
- $K_{min}$ - минимальное количество сделок с облигацией в течение предыдущих 250 торговых дней необходимых для возможности применения 1-го и 2-го методов (рекомендуется положить  $K_{min} = 50$ );
- $R_{max}$ - максимальная погрешность, с которой может определяться справедливая стоимость облигации в рамках данной Методики. Данный показатель ограничивает в процентном выражении максимально допустимое отклонение оценки справедливой цены от ее реального значения, а именно задает максимальную допустимую величину интервалов цен, т.е.

$$\frac{U_i(t) - D_i(t)}{P_i(t)} \leq R_{max} .$$

Рекомендуется положить  $R_{max} = 0,01$  .

2.3. Границы интервалов допустимых значений цен для каждого из трех методов можно задать с помощью максимального значения отклонения оценки справедливой цены от его среднего значения (справедливой стоимости облигации), т.е.

$$D_i^j(t) = P_i^j(t) \left( 1 - \frac{1}{2} R_i^j(t) \right) ,$$

$$U_i^j(t) = P_i^j(t) \left( 1 + \frac{1}{2} R_i^j(t) \right) ,$$

где  $R_i^j(t) = \frac{U_i^j(t) - D_i^j(t)}{P_i^j(t)}$  – точность оценки справедливой цены на основе  $j$ -го метода.

Величины погрешности методов  $R_i^j(t)$  и максимальная погрешность  $R_{max}$  Методики должны быть связаны между собой определенными соотношениями:

- если цена определяется на основе 1-го метода, то  $R_i^1(t) \leq R_i^2(t) \leq R_{max}$  ;
- если цена определяется на основе 2-го метода, то  $R_i^2(t) \leq R_{max}$  ;

- погрешность третьего метода не зависит ни от специфики облигации, ни от даты  $t$ , т.е.  $R_i^3(t) = R^3 = const$ , и  $R^3 \leq R_{max}$ ;
- если цена определяется на основе 2-го метода, то вообще говоря может наблюдаться соотношение  $R_i^2(t) \geq R^3$ .

2.4. Для формализации правил выбора метода для определения справедливой цены облигации определим две вспомогательные переменные, характеризующие достоверность биржевых котировок облигации.

Пусть  $K_i(t)$  – количество биржевых сделок с облигацией за предыдущие 250 торговых дней,  $q_i(t)$  – характеристика достоверности котировки в момент времени  $t$ ,  $Q_i(t)$  – пороговый уровень достоверности котировки, необходимый для признания ее достоверной, т.е. котировка достоверна, если  $q_i(t) \leq Q_i(t)$ . Точное определение величин  $q_i(t)$  и  $Q_i(t)$  будет дано в разделе 5.

2.5. Выбор метода определения справедливой цены облигации и интервала допустимых значений цен производится на основе следующих правил:

- метод фактических цен применяется, если  $K_i(t) \geq K_{min}$  и в день  $t$  имеется биржевая котировка, для которой  $q_i(t) \leq Q_i(t)$ ;
- метод экстраполяции индексов применяется, если одновременно метод фактических цен не применим,  $K_i(t) \geq K_{min}$  и  $R_i^2(t) \leq R_{max}$ ;
- метод факторного разложения цены применяется, если одновременно не применим ни метод фактических цен, ни метод экстраполяции индексов.

### 3. Оценка активности торгов облигаций

3.1. В рамках данной Методики предлагается два концептуальных подхода к определению справедливых цен облигаций: на основе торговой информации (метод фактических цен и метод экстраполяции индексов) и на основе общих характеристик эмиссий (метод факторного разложения цены). Выбор одного из подходов к определению справедливых цен основывается на характеристике активности торгов облигации. Чем более активно торгуется бумага, тем более достоверны ее котировки, и тем точнее оценка величины ее справедливой стоимости.

Таким образом, под характеристикой активности торгов целесообразно понимать точность определения справедливой стоимости облигации на основе торговой информации. В данной Методике точность определения справедливой стоимости задается шириной интервалов допустимых значений цен, а именно величиной  $R_i^2(t)$ .

Следовательно, если точность определения цены приемлема, т.е.  $R_i^2(t) \leq R_{max}$ , то облигация активно торгуется, в противном случае необходимо признать, что активность недостаточна и необходимо перейти к использованию метода факторного разложения цены.

Для того чтобы оценить точность метода  $R_i^2(t)$  необходимо располагать достаточным количеством исторических наблюдений, поэтому дополнительным условием активности торгов является ограничение  $K_i(t) \geq K_{min}$ .

3.2. Точность  $R_i^2(t)$  оценки справедливой цены зависит от ряда характеристик торговой статистики, а именно:

- размер торгового спреда;
- объемы сделок;
- частота сделок.

Механизм влияния этих характеристик на точность цены (активность торгов) определяется моделью оценки справедливых цен по данным торговой статистики, которая будет описана ниже.

3.3. Точные формулы для оценки активности торгов будут даны в разделе 6.

#### 4. Модель взаимосвязи цен облигаций с облигационными индексами

4.1. В основу модели оценки справедливых цен облигаций на основе торговой статистики предлагается положить модель коинтеграции временных рядов и модель коррекции ошибки, которые были предложены<sup>1</sup> нобелевскими лауреатами Р. Энглом и К. Грейнджером.

Идея данных моделей применительно к оценке справедливых стоимостей облигаций выглядит следующим образом. Если мы наблюдали в некотором прошлом биржевые цены оцениваемой облигации и при этом мы знаем, как в среднем вел себя весь рынок облигаций за соответствующий прошедший период времени, то мы можем примерно оценить сколько должна стоить анализируемая облигация на текущий момент времени.

4.2. Поведение в среднем рынка облигаций описывается облигационными индексами (индексами доходностей), которые в частности на ежедневной основе рассчитывает<sup>2</sup> Московская биржа. Индексы для государственных облигаций подразделяются в зависимости от дюрации облигаций, в них входящих, а индексы для корпоративных и муниципальных облигаций рассчитываются в зависимости от величин кредитных рейтингов и дюраций соответствующих облигаций, входящих в базу расчета индекса.

Таким образом, каждой облигации, зная ее кредитный рейтинг (при отсутствии рейтинга эмиссии берется рейтинг гаранта или эмитента) и дюрацию, можно присвоить некоторый соответствующий ей индекс доходности  $\tilde{I}(t)$ .

4.3. Пусть  $Y_i(t)$  – доходность для  $i$ -ой облигации, связанной с индексом  $\tilde{I}(t)$ . Обозначим через  $Du_i(t)$  дюрацию соответствующей облигации. Пусть  $G(t, u)$

<sup>1</sup> См. Engle, Robert F.; Granger, Clive W. J. (1987). "Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing". *Econometrica*. 55 (2): 251–276. JSTOR 1913236

<sup>2</sup> См. <http://moex.com/ru/index/RUABITR/about/>



– базовая доходность в момент времени  $t$  на срок  $u$ , рассчитываемая на основе модели Смита-Уилсона (см. Приложение 1).

Тогда для каждой  $i$  –ой облигации определим спред к безрисковой ставке по формуле

$$y_i(t) = Y_i(t) - G(t, Du_i(t)) .$$

Аналогичным образом поступим для определения скорректированного на величину базовой ставки облигационного индекса  $I(t)$  по формуле

$$I(t) = \tilde{I}(t) - G(t, Du_1(t)) ,$$

где  $Du_1(t)$  – дюрация индекса  $\tilde{I}(t)$ , которая также как и значение самого индекса публикуется Московской биржей по итогам каждого торгового дня.

- 4.4. Модель коинтеграции для спредов  $y_i(t)$  и индекса  $I(t)$  будет задаваться соотношением:

$$y_i(t) = \beta_i^0 + \beta^1 I(t) + \varepsilon_i(t) ,$$

где  $\beta_i^0$  и  $\beta^1$  коэффициенты модели (коэффициент  $\beta^1$  одинаков для всех облигаций, связанных с индексом  $I(t)$ ), а  $\varepsilon_i(t)$  – стационарный процесс. Модель коинтеграции определяет долгосрочное равновесие между значениями доходности облигации и свойственным ей индексом доходности.

Оценка коэффициентов  $\beta_i^0$  и  $\beta^1$  производится методом наименьших квадратов для регрессионного уравнения:

$$y_i(t) = \sum_j \beta_j^0 1\{i=j\} + \beta^1 I(t) + \varepsilon_i(t) .$$

- 4.5. Для каждой  $i$  –ой облигации определим волатильность  $\sigma_i$  ее доходности по формуле:

$$(\sigma_i)^2 = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} \frac{(y_i(\tau_i^{j+1}) - y_i(\tau_i^j))^2}{\tau_i^{j+1} - \tau_i^j}$$

где  $M_i$  – количество дней из 250 предыдущих торговых сессий, когда на бирже совершались сделки с  $i$  –ой облигацией,

$\{\tau_i^j\}_{j=1}^{M_i}$  – множество дней из 250 предыдущих торговых сессий, когда совершались сделки с  $i$  –ой облигацией.

- 4.6. Если модель коинтеграции задает долгосрочное равновесие между доходностями облигаций и облигационными индексами, то краткосрочную их связь задает модель коррекции ошибок.

Модель коррекции ошибок для дискретного времени  $t$  (где  $t$  – день) задается уравнением

$$y_i(t+1) - y_i(t) = \gamma(I(t+1) - I(t)) + \alpha \varepsilon_i(t) + v_i(t+1) , \quad (1)$$

где  $\varepsilon_i(t) = y_i(t) - \beta_i^0 - \beta^1 I(t)$ ,

$v_i(t)$  – нормально распределенные независимые случайные величины с нулевым средним и стандартным отклонением  $\sigma_i^v$ , т.е.  $v_i(t) \sim N(0, (\sigma_i^v)^2)$ .

коэффициенты  $\gamma$  и  $\alpha$  не зависят от анализируемой облигации и даты (т.е. от  $t$  и  $i$ ).

Распределение ошибки  $v_i(t)$  зависит от специфики  $i$ -ой облигации, что осложняет оценку параметров  $\gamma$  и  $\alpha$  модели. Чтобы преодолеть данное затруднение делается предположение, что  $v_i(t) = \sigma_i \tilde{v}_i(t)$ , где  $\tilde{v}_i(t) \sim N(0, \sigma^2)$ , т.е. распределение случайной величины  $\tilde{v}_i(t)$  не зависит ни от времени  $t$ , ни от специфики  $i$ -ой облигации.

Исходя из данного предположения соотношение (1) переписывается в следующем виде:

$$\frac{y_i(t+1) - y_i(t)}{\sigma_i} = \gamma \frac{I(t+1) - I(t)}{\sigma_i} + \alpha \frac{\varepsilon_i(t)}{\sigma_i} + \tilde{v}_i(t+1), \quad (2)$$

где  $\tilde{v}_i(t+1)$  – независимые, одинаково распределенные случайные величины,  $\tilde{v}_i(t) \sim N(0, \sigma^2)$ .

Оценки параметров  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\sigma$  получаются из регрессионного уравнения (2) методом наименьших квадратов.

Тогда в качестве оценки  $\sigma_i^v$  следует взять величину  $\sigma_i^v = \sigma \sigma_i$ .

- 4.7. После того как мы оценили все параметры модели коррекции ошибки у нас появилась возможность построения прогноза значений спредов  $y_i(t)$  на произвольное целое количество дней вперед при условии наличия информации о значениях индекса  $I(t)$  в соответствующие дни.

Прогнозное среднее значение спреда задается рекуррентным образом через значение прогноза на предыдущую дату:

$$\hat{y}_i(t+1) = \hat{y}_i(t) + \gamma(I(t+1) - I(t)) + \alpha(\hat{y}_i(t) - \beta_i^0 - \beta^1 I(t)),$$

при этом прогнозная величина будет иметь нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i(t+1)^2$ , которая вычисляется рекуррентным образом через дисперсию прогноза на предыдущем шаге:

$$\sigma_i(t+1)^2 = (1 + \alpha)^2 \sigma_i(t)^2 + (\sigma_i^v)^2,$$

т.е.  $y_i(t+1) \sim N(\hat{y}_i(t+1), \sigma_i(t+1)^2)$ .

- 4.8. Как было показано выше, модель коррекции ошибки позволяет строить прогноз спреда облигации на произвольное целое количество дней вперед. Вместе с тем, нам понадобится иметь возможность строить прогнозы спредов не только на целое, но и на дробное количество периодов. Для этого нам понадобится модель коррекции ошибки для непрерывного времени, которая имеет следующий вид:

$$dy_i(t) = g dI(t) + \lambda(y_i(t) - b_i^0 - b^1)dt + \sigma_i^v dW(t),$$

где  $W(t)$  – броуновское движение.

Коэффициенты модели коррекции ошибки для непрерывного времени могут быть получены через значения модели коррекции ошибки для дискретного времени по следующим формулам:

$$\lambda = \ln(1 + \alpha),$$

$$b_i^0 = \beta_i^0,$$

$$b^1 = \beta^1,$$

$$g = \beta^1 + \frac{\lambda}{\alpha}(\gamma - \beta^1),$$

$$\sigma_i^w = \sqrt{\frac{-2\lambda}{1 - \exp(2\lambda)}} \sigma_i^y.$$

- 4.9. Для построения прогноза спреда облигации на основе модели коррекции ошибки с непрерывным временем необходимо воспользоваться следующими формулами.

Пусть  $\hat{y}_i(t_0)$  и  $\sigma_i(t_0)$  уже оцененные значения среднего стандартного отклонения для прогноза спреда на момент времени  $t_0$ . Будем считать, что момент  $t_0$  находится внутри некоторого торгового дня, на начало и конец которого известны значения соответствующего облигационного индекса  $I'$  и  $I''$  соответственно (значение облигационного индекса на начало дня приравнивается к значению облигационного индекса на конец предыдущего торгового дня). Тогда для любого момента времени  $t$  внутри того же торгового дня, но лежащего после  $t_0$ , т.е.  $t > t_0$ , прогноз спреда будет задаваться следующими рекуррентными соотношениями:

$$\hat{y}_i(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \hat{y}_i(t_0) + \gamma(I'' - I') \frac{1 - e^{\lambda(t-t_0)}}{1 - e^\lambda} + (1 - e^{\lambda(t-t_0)}) (\beta_i^0 + \beta^1 I') + (I'' - I') \beta^1 \left( t - t_0 - \frac{1 - e^{\lambda(t-t_0)}}{1 - e^\lambda} \right),$$

$$\sigma_i(t)^2 = e^{2\lambda(t-t_0)} \sigma_i(t_0)^2 + \frac{1 - e^{2\lambda(t-t_0)}}{1 - e^{2\lambda}} \sigma_i^y.$$

Таким образом, прогноз спреда на момент времени  $t$  облигации будет являться нормально распределенной случайной величиной  $y_i(t) \sim N(\hat{y}_i(t), \sigma_i(t)^2)$ .

- 4.10. Модели коррекции ошибки для дискретного и непрерывного времени должны использоваться в комбинации для получения реальных прогнозов спреда облигаций. Так, модель коррекции ошибки для дискретного времени позволяет получить прогнозы спреда для итогов торгов для отдельных дней, а модель коррекции ошибки для непрерывного времени позволяет строить прогнозы спредов внутри торговых дней.

## 5. Метод фактических цен

- 5.1. Метод фактических цен предназначен для определения справедливых стоимостей облигаций в той ситуации, когда в течение дня с оцениваемой облигацией совершались биржевые сделки, параметры которых свидетельствуют о том, что данные сделки достоверны (соответствуют условиям эффективного рынка). Если в течение дня были зафиксированы такие сделки, то справедливая стоимость облигации будет определяться средневзвешенной ценой достоверных сделок, усредненной по их объемам.

- 5.2. Для определения достоверности сделок необходимо формализовать показатель достоверности для каждой биржевой сделки в момент времени  $t$  с  $i$ -ой облигацией.

Пусть в момент времени  $t$  с  $i$ -ой облигацией была совершена сделка объема  $V_i(t)$ , и при этом в момент начала реализации этой сделки торговый спред в очереди торговых заявок составлял  $s_i(t)$ . Тогда определим показатель достоверности данной сделки следующим образом:

$$q_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{V_i(t)}} .$$

Чем меньше значение данного показателя, тем выше достоверность соответствующей сделки. Выбор именно такой формы показателя достоверности обусловлен следующими соображениями. Во-первых, размер торгового спреда является одним из часто используемых показателей ликвидности бумаги, при этом чем выше ликвидность, тем более обосновано предположение об эффективности рынка, т.е. котировка более достоверна. Во-вторых, как было показано множеством исследователей, величина торгового спреда тесно (линейно) связана с волатильностью торгуемого инструмента. Поэтому характеристикой достоверности сделки можно считать волатильность стоимости единичного объема актива. В-третьих, если на бирже была совершена сделка единичного объема с волатильностью цены  $\sigma$ , то волатильность суммарной стоимости для  $V$  сделок единичного объема составит  $\sigma\sqrt{V}$ , и соответственно в качестве оценки волатильности для стоимости актива единичного объема следует взять отношение  $\frac{s(t)}{\sqrt{V(t)}}$ , которое в свою очередь будет характеристикой достоверности сделки произвольного объема  $V$ .

- 5.3. Объем сделки  $V_i(t)$  задается в количестве участвующих в сделке бумаг (т.е. задается в штуках).

Спред  $s_i(t)$  задается в терминах доходности облигации и вычисляется по формуле:

$$s_i(t) = \left( P_i^{ask}(t) - P_i^{bid}(t) \right) \frac{(1+Y_i(t))}{P_i(t) Du_i(t)} ,$$

где  $P_i^{ask}(t)$  и  $P_i^{bid}(t)$  цены предложения и спроса в очереди торговых заявок на момент начала совершения сделки,

$P_i(t)$  – стоимость бумаги в сделке,

$Y_i(t)$  – доходность бумаги по цене сделки,

$Du_i(t)$  – дюрация облигации.

- 5.4. Предположим, что нам известна величина  $Q_i(t)$  – минимальный уровень достоверности котировки, необходимый для признания ее достоверной, т.е. котировка достоверна, если  $q_i(t) \leq Q_i(t)$ .

Пусть  $\{\tau_j\}_{j=1}^{N_i}$  совокупность моментов времени внутри одного торгового дня  $t$ , когда наблюдались достоверные сделки, т.е.  $q_i(\tau_j) \leq Q_i(\tau_j)$ .

Пусть  $\{Y_i(\tau_j); V_i(\tau_j)\}_{j=1}^{N_i}$  – совокупность доходностей и объемов достоверных сделок.

Определим справедливую доходность облигации на основе метода фактических цен, по формуле

$$Y_i^1(t) = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} Y_i(\tau_j) V_i(\tau_j)}{\sum_{j=1}^{N_i} V_i(\tau_j)},$$

В случае, когда облигация не содержит встроенных опционов справедливая стоимость  $P_i^1(t)$  на основе метода фактических цен определяется соотношением:

$$P_i^1(t) = \frac{100}{Nom} \sum_k \frac{CF_k}{(1 + Y_i^1(t))^{t_k}} - A$$

где  $A$  – накопленный купонный доход (НКД) облигации, выраженный в процентах от ее номинальной стоимости,

$Nom$  – непогашенная часть номинальной стоимости облигации,

$k$  – порядковый номер денежного потока,

$CF_k$  -  $k$ -й денежный поток по облигации - включает купонные, амортизационные платежи, погашение остаточной номинальной стоимости (для облигаций с плавающей ставкой купона величина купонных платежей приравнивается к величине последнего известного купона),

$t_k$  – срок до даты  $k$ -го денежного потока в годах.

- 5.5. Определим теперь точность  $R_i^1(t)$  оценки справедливой стоимости облигации на основе метода фактических цен. Данный показатель точности определяет ширину диапазона допустимых значений справедливой цены.

Исходя из модели коррекции ошибки с дискретным временем, волатильность прогноза цены на горизонте один день определяется величиной  $\sigma_i^y$ . Следовательно, прогноз доходности облигации будет соответствовать нормальному распределению  $N(Y_i^1(t), (\sigma_i^y)^2)$ .

Диапазон цен будет определяться диапазоном доходностей облигации исходя из предположения, что доходность облигации должна находиться внутри данного диапазона в течение дня с заданной вероятностью  $\theta$ , т.е.

$$P\{|Y_i(t) - Y_i^1(t)| < \varepsilon/2\} = \theta,$$

где  $\varepsilon$  – ширина диапазона доходностей.

Обозначим через  $k_\theta$  - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\frac{1}{2}(\theta + 1)$ , т.е.

$$\frac{1}{2}(\theta + 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_\theta} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Тогда ширина доверительного интервала будет равна

$$\varepsilon = 2k_{\theta}\sigma_i^y,$$

а точность  $R_i^1(t)$  справедливой стоимости облигации будет равна

$$R_i^1(t) = 2k_{\theta}\sigma_i^y \frac{Du_i(t)}{1+Y_i^1(t)}.$$

- 5.6. Справедливая стоимость облигации, определенная на основе метода фактических цен, используется в качестве итоговой оценки справедливой стоимости облигации, если точность данной оценки соответствует требуемому уровню:  $R_i^1(t) \leq R_{max}$ .
- 5.7. Для того чтобы закончить описание метода фактических цен необходимо определить методику оценки величины  $Q_i(t)$  – порогового уровня достоверности котировки. Это можно сделать исходя из следующих соображений.

Предположим, что  $Q_i(t) = \delta$ , где  $\delta$  – произвольно выбранное положительное число. Тогда, проанализировав все биржевые сделки с выбранной облигацией за предыдущие 250 торговых сессий, мы можем определить моменты времени  $\{t_j\}_{j=1}^{N_i}$  в которые мы наблюдали достоверные котировки, т.е.  $q_i(t_j) \leq Q_i(t_j) = \delta$ .

Зная величину спреда  $y_i(t_j)$  в момент времени  $t_j$ , мы можем построить на основе модели коррекции ошибки прогноз спреда в момент времени  $t_{j+1}$ . Данный прогноз будет иметь нормальное распределение  $N(\hat{y}_i(t_{j+1}), \sigma_i(t_{j+1})^2)$ .

Доверительный интервал прогноза на момент времени  $t_{j+1}$  задается соотношением

$$\left| \frac{y_i(t_{j+1}) - \hat{y}_i(t_{j+1})}{\sigma_i(t_{j+1})} \right| \leq k_{\theta} \quad . \quad (3)$$

Если сделка в момент времени  $t_{j+1}$  является достоверной, то она должна не противоречить прогнозу, полученному на основе модели коррекции ошибки, т.е. для спреда  $y_i(t_{j+1})$  должно выполняться соотношение (3).

При этом важно, чтобы построенный прогноз был обоснован с содержательной точки зрения, т.е. точность такого прогноза должна быть приемлемой:

$$2k_{\theta}\sigma_i(t_{j+1}) \frac{Du_i(t_{j+1})}{1+Y_i(t_{j+1})} \leq R_{max} \quad . \quad (4)$$

Обозначим через  $B(\delta)$  количество моментов времени из совокупности  $\{t_j\}_{j=1}^{N_i}$ , для которых выполняется соотношение (4), а через  $C(\delta)$  – количество моментов времени, для которых одновременно выполняются соотношения (3) и (4).

$$\text{Пусть } D(\delta) = \frac{C(\delta)}{B(\delta)} \quad .$$

Если мы правильно изначально задали величину  $\delta$ , то достоверные котировки в моменты времени, для которых можно построить приемлемые по точности прогнозы, должны этим прогнозам в большинстве случаев не противоречить, т.е. должно выполняться соотношение  $D(\delta) \geq \theta$ .

Следовательно,  $Q_i(t)$  можно определить следующим образом:

$$Q_i(t) = \max\{\delta: \text{для всех } \delta' < \delta \text{ выполняется } D(\delta') \geq \theta\}.$$

## 6. Метод экстраполяции индексов

- 6.1. Метод экстраполяции фондовых индексов для определения справедливой цены облигаций применим в той ситуации, когда на анализируемую дату отсутствуют биржевые сделки с оцениваемой облигацией или параметры имеющихся сделок не позволяют их признать достоверными (соответствующими условиям эффективного рынка). Вместе с тем, если в такой ситуации имеется статистика достоверных сделок в некотором прошлом, то связав ее со значениями облигационных индексов, можно получить приемлемые по точности оценки справедливой стоимости облигации на анализируемую дату  $t$ . Для этих целей предлагается воспользоваться моделью коррекции ошибки.
- 6.2. Оценка справедливой стоимости облигации с определением интервала допустимых изменений цены в таком случае сводится к задаче определения параметров распределения прогноза цены, в предположении что такой прогноз соответствует нормальному распределению  $N(\hat{y}_i(t), \sigma_i(t)^2)$ .
- 6.3. Таким образом, для того чтобы оценить справедливую стоимость облигации на дату  $t+1$ , необходимо понять, как связаны между собой параметры распределений прогнозов  $N(\hat{y}_i(t), \sigma_i(t)^2)$  и  $N(\hat{y}_i(t+1), \sigma_i(t+1)^2)$ .

Возможны две принципиально различные ситуации:

1. в течение  $t+1$  торгового дня отсутствовали биржевые сделки с облигацией;
  2. в течение  $t+1$  торгового дня имеются биржевые сделки с облигацией.
- 6.4. Для случая, когда в течение анализируемого дня биржевые сделки с облигацией отсутствовали, связь параметров распределений прогнозов задается моделью коррекции ошибки для дискретного времени.

$$\begin{cases} \hat{y}_i(t+1) = \hat{y}_i(t) + \gamma(I(t+1) - I(t)) + \alpha(\hat{y}_i(t) - \beta_i^0 - \beta^1 I(t)) \\ \sigma_i(t+1)^2 = (1 + \alpha)^2 \sigma_i(t)^2 + (\sigma_i^v)^2 \end{cases}.$$

- 6.5. Несколько более сложно обстоит дело в ситуации, когда в течение торгового дня совершались биржевые сделки с облигацией.

Пусть  $\{\tau_j\}_{j=1}^{N_i}$  совокупность моментов времени внутри одного торгового дня  $t+1$ , когда происходили сделки  $\{\tilde{y}_i(\tau_j); s_i(\tau_j); V_i(\tau_j)\}_{j=1}^{N_i}$  где

$\tilde{y}_i(\tau_j)$  - спред к базовой доходности сделки;

$s_i(\tau_j)$  - торговый спред (в терминах доходности) в момент начала реализации сделки;

$V_i(\tau_j)$  - объем сделки (в количестве бумаг).

Для удобства доопределим момент времени  $\tau_0 = t$ , т.е. концу предыдущего торгового дня. При этом нам уже известны параметры распределения прогноза в момент времени  $\tau_0$ , который соответствует нормальному распределению  $N(\hat{y}_i(t), \sigma_i(t)^2)$ .

Установим рекуррентную связь между прогнозами в моменты времени  $\tau_j$  и  $\tau_{j+1}$ . Пусть в момент времени  $\tau_j$  прогноз доходности описывается распределением  $N(\hat{y}_i(\tau_j), \sigma_i(\tau_j)^2)$ . Тогда на основе модели коррекции ошибки для непрерывного времени мы можем оценить параметры прогноза  $N(\hat{y}_i(\tau_{j+1} - 0), \sigma_i(\tau_{j+1} - 0)^2)$  на момент времени  $\tau_{j+1}$  без учета информации о параметрах сделки в момент времени  $\tau_{j+1}$  по формулам:

$$\hat{y}_i(\tau_{j+1} - 0) = e^{\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)} \hat{y}_i(\tau_j) + \gamma(I'' - I') \frac{1 - e^{\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)}}{1 - e^{\lambda}} + (1 - e^{\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)}) (\beta_i^0 + \beta_i^1 I') + (I'' - I') \beta_i^1 \left( \tau_{j+1} - \tau_j - \frac{1 - e^{\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)}}{1 - e^{\lambda}} \right),$$

$$\sigma_i(\tau_{j+1} - 0)^2 = e^{2\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)} \sigma_i(\tau_j)^2 + \frac{1 - e^{2\lambda(\tau_{j+1} - \tau_j)}}{1 - e^{2\lambda}} \sigma_i^\gamma.$$

- 6.6. Для того чтобы учесть информацию о параметрах сделки в момент времени  $\tau_{j+1}$  в прогнозе на этот же момент времени предлагается воспользоваться идеей фильтра Калмана.

Предположим, что наблюдаемый в момент  $\tau_{j+1}$  спред  $\tilde{y}_i(\tau_{j+1})$  связан с реальным, но неизвестным нам значением справедливой цены соотношением

$$\tilde{y}_i(\tau_{j+1}) = y_i(\tau_{j+1}) + \psi, \text{ где } \psi \sim N(0, \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2).$$

Величина стандартного отклонения ошибки в фильтре Калмана  $\tilde{\sigma}_i(\tau_j)$  нам неизвестна, но по своему смыслу она задает точность (достоверность) оценки справедливой цены.

При этом у нас уже определена мера достоверности сделки на основе торгового спреда и объема:

$$q_i(\tau_{j+1}) = \frac{s_i(\tau_{j+1})}{\sqrt{V_i(\tau_{j+1})}},$$

Предположим, что неизвестная нам характеристика точности сделки  $\tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})$  пропорциональна известной нам характеристике  $q_i(\tau_{j+1})$  с некоторым коэффициентом  $\rho$ :

$$\tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1}) = \rho q_i(\tau_{j+1}).$$



В реальных расчетах предлагается положить  $\rho = 10$ . Порядок оценки  $\rho$  будет описан ниже в п. 6.9.

На основе фильтра Калмана мы получаем, что прогноз спреда имеет распределение  $N(\tilde{y}_i(\tau_{j+1}), \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2)$ .

- 6.7. Таким образом, на основе модели коррекции ошибки мы знаем (без учета информации о сделке), что распределение прогноза спреда  $N(\hat{y}_i(\tau_{j+1} - 0), \sigma_i(\tau_{j+1} - 0)^2)$ , а фильтр Калмана (учитывающий информацию о сделке) позволяет утверждать, что прогноз имеет распределение  $N(\tilde{y}_i(\tau_{j+1}), \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2)$ .

Итоговое распределение прогноза на момент времени  $\tau_{j+1}$  получается путем усреднения этих двух распределений. Усредненное распределение прогноза  $N(\hat{y}_i(\tau_{j+1}), \sigma_i(\tau_{j+1})^2)$  будет иметь следующие параметры:

$$\hat{y}_i(\tau_{j+1}) = \frac{\sigma_i(\tau_{j+1}-0)^2}{\sigma_i(\tau_{j+1}-0)^2 + \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2} \tilde{y}_i(\tau_{j+1}) + \frac{\tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2}{\sigma_i(\tau_{j+1}-0)^2 + \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^2} \hat{y}_i(\tau_{j+1} - 0), \quad (*)$$

$$\sigma_i(\tau_{j+1})^2 = \left( \sigma_i(\tau_{j+1} - 0)^{-2} + \tilde{\sigma}_i(\tau_{j+1})^{-2} \right)^{-1}.$$

- 6.8. Исходя из полученных рекуррентных соотношений, мы можем получить параметры распределения прогноза на момент времени  $\tau_{N_i}$ , т.е. на последний момент внутри  $t+1$  торгового дня, когда была совершена биржевая сделка с облигацией. Теперь вновь воспользуемся моделью коррекции ошибки, чтобы отыскать параметры итогового распределения прогноза  $N(\hat{y}_i(t+1), \sigma_i(t+1)^2)$ , зная параметры распределения прогноза  $N(\hat{y}_i(\tau_{N_i}), \sigma_i(\tau_{N_i})^2)$ . В итоге получаем

$$\hat{y}_i(t+1) = e^{\lambda(t+1-\tau_{N_i})} \hat{y}_i(\tau_{N_i}) + \gamma(I'' - I') \frac{1 - e^{\lambda(t+1-\tau_{N_i})}}{1 - e^{\lambda}} + \left(1 - e^{\lambda(t+1-\tau_{N_i})}\right) (\beta_i^0 + \beta^1 I') + (I'' - I') \beta^1 \left( t + 1 - \tau_j - \frac{1 - e^{\lambda(t+1-\tau_{N_i})}}{1 - e^{\lambda}} \right),$$

$$\sigma_i(t+1)^2 = e^{2\lambda(t+1-\tau_{N_i})} \sigma_i(\tau_{N_i})^2 + \frac{1 - e^{2\lambda(t+1-\tau_{N_i})}}{1 - e^{2\lambda}} \sigma_i^y.$$

- 6.9. Для того, чтобы организовать процедуру оценки параметра  $\rho$  заметим следующий факт. Если в некоторый момент времени  $t$  мы наблюдаем котировку облигации  $\tilde{y}_i(t)$ , то она войдет в расчет справедливой стоимости (спреда) согласно формуле (\*) с весом

$$\frac{\sigma_i(t-0)^2}{\sigma_i(t-0)^2 + \tilde{\sigma}_i(t)^2} = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{\sigma}_i(t)^2}{\sigma_i(t-0)^2}} = \frac{1}{1 + \left( \rho \frac{q_i(t)}{\sigma_i(t-0)} \right)^2} = \frac{1}{1 + \exp\left( 2\ln(\rho) + 2\ln\left( \frac{q_i(t)}{\sigma_i(t-0)} \right) \right)}.$$

При этом вспомним, что для каждой котировки у нас есть критерий для проверки ее достоверности (соответствия условиям эффективного рынка) на основе сравнения величины  $q_i(t)$  с пороговым значением  $Q_i(t)$ .

Если котировка является достоверной, то естественно ожидать, что она должна входить в расчет справедливой стоимости с весом близким к 1, и 0 в противном случае, т.е.

$$\frac{1}{1+\exp\left(2\ln(\rho)+2\ln\left(\frac{q_i(t)}{\sigma_i(t-0)}\right)\right)} \approx 1\{q_i(t) < Q_i(t)\} \quad .$$

Полученное соотношение является вариантом логистической регрессии

$$Y = \frac{1}{1+\exp(a+bX)} \quad ,$$

где  $a = 2\ln(\rho)$ ,  $b = 2$ ,  $Y = 1\{q_i(t) < Q_i(t)\}$ ,  $X = \ln\left(\frac{q_i(t)}{\sigma_i(t-0)}\right)$ .

Оценив параметры логистической регрессии по выборке наблюдаемых котировок облигации получаем, что  $\rho = e^{\frac{a}{2}}$  .

- 6.10. После того, как мы определили распределение  $(\hat{y}_i(t), \sigma_i(t)^2)$  прогноза спреда на анализируемую дату  $t$ , мы можем определить справедливую стоимость облигации следующим образом.

В случае, когда облигация не содержит встроенных опционов, справедливая стоимость  $P_i^2(t)$  на основе метода экстраполяции индекса определяется соотношением:

$$P_i^2(t) = \frac{100}{Nom} \sum_k \frac{CF_k}{\left(1+G(t, Du_i(t)) + \hat{y}_i(t)\right)^{t_k}} - A \quad ,$$

где  $A$  – накопленный купонный доход (НКД) облигации, выраженный в процентах от ее номинальной стоимости,

$Nom$  – непогашенная часть номинальной стоимости облигации,

$k$  – порядковый номер денежного потока,

$CF_k$  -  $k$ -й денежный поток по облигации - включает купонные, амортизационные платежи, погашение остаточной номинальной стоимости (для облигаций с плавающей ставкой купона величина купонных платежей приравнивается величине последнего известного купона),

$Du_i(t)$  – дюрация облигации,

$G(;)$  – кривая базовых доходностей,

$t_k$  – срок до даты -го денежного потока в годах.

- 6.11. Точность оценки справедливой стоимости облигации по аналогии с оценкой точности в модели фактических цен определяется соотношением:

$$\tilde{R}_i^2(t) = 2k_\theta \sigma_i(t) \frac{Du_i(t)}{1+G(t, Du_i(t)) + \hat{y}_i(t)} \quad .$$

Именно данная величина формализует понятие активности торгов. Если  $R_i^2(t) \leq R_{max}$ , то точность оценки справедливой стоимости на основе торговой информации приемлемая, что означает, что активность торгов достаточная.

- 6.12. Исходя из того, что Ценовой центр планирует публиковать справедливые стоимости облигаций не чаще чем один раз в день, то интервал возможного

изменения цен должен включать в себя возможные внутрисуточные флуктуации цены между моментами публикации данных Ценового центра.

Исходя из этих соображений, точность метода экстраполяции индексов должна быть ограничена внутрисуточной волатильностью  $\sigma_i^v$ :

$$R_i^2(t) = 2k_{\theta} \max\{\sigma_i(t); \sigma_i^v\} \frac{Du_i(t)}{1 + G(t, Du_i(t)) + y_i(t)} .$$

## 7. Метод факторного разложения цены

7.1. Метод факторного разложения цены применяется для определения справедливых стоимостей облигаций в тех случаях, когда методы оценки справедливых цен, основанные на статистике торгов соответствующей бумаги или не применимы, или их точность неудовлетворительна.

В основе данного метода лежит модификация известной модели<sup>3</sup> нобелевского лауреата Ю. Фамы и его соавтора К. Френча. Данная модель предполагает, что  $z$ -спред  $i$ -ой облигации в момент времени  $t$  можно представить в виде взвешенной суммы ряда факторов, которые или характеризуют общую конъюнктуру рынка облигаций, или отражают некоторые специфические характеристики эмиссии. При этом ценовая информация торгов анализируемой бумаги в явном виде не учитывается.

7.2. Предлагаемая модификация модели Фамы-Френча представляется в виде следующего регрессионного соотношения

$$z_i(t) = \beta_1 F_1(t) + \beta_2 F_2(t) + \beta_3 Risk_i^b(t) + \beta_4 1\{t - \tau_i < T\} + \beta_5 HHI_i(t) + \beta_6 IL_i^1(t) + \beta_7 IL_i^2(t) + \sum_{j=1}^N \varphi_j 1\{i \in j - \text{я отрасль}\} + \varepsilon \quad (5)$$

где

$\varphi_j, \beta_k, b$  – коэффициенты модели, требующие предварительного оценивания,

$1\{i \in j - \text{я отрасль}\}$  – фиктивная переменная, принимающая значения 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит эмитент  $i$ -ой облигации к  $j$ -ой отрасли,

$F_1(t)$  - первый фактор Фамы-Френча, характеризующий наклон кривой базовых ставок,

$F_2(t)$  - второй фактор Фамы-Френча, характеризующий средний уровень кредитного риска корпоративных облигаций.

$Risk_i^b(t)$  – фактор, характеризующий кредитный риск  $i$ -ой облигации,

$\tau_i$  - дата размещения  $i$ -ой облигации,

$T$  – пороговый уровень для учета эффекта “on the run”,

$HHI_i(t)$  – индекс Херфиндаля-Хиршмана для структуры владения облигацией,

<sup>3</sup> Fama, Eugene F.; French, Kenneth R. (1993). "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds". Journal of Financial Economics 33 (1): 3–56. doi:10.1016/0304-405X(93)90023-5.

$IL_i^j(t)$  - факторы, характеризующие ликвидность  $i$ -ой облигации ( $j = 1,2$ ), основанные на концепции вмененной ликвидности,

$\varepsilon$  – ошибка регрессионной модели (случайная величина с распределением  $N(0, \sigma^2)$ ).

Ниже будет представлена подробная информация о том, как определяются факторы в предлагаемой модели.

7.3. Для классификации эмиссий по отраслям предлагается использовать классификатор, представленный в Приложении 2.

7.4. Первый фактор Фамы-Френча, характеризующий наклон кривой базовых ставок, рассчитывается по формуле

$$F_1(t) = G(t, 10) - G(t, 1),$$

где  $G(t, u)$  – базовая доходность в момент времени  $t$  на срок  $u$ .

7.5. Второй фактор Фамы-Френча, характеризующий средний уровень кредитного риска в сегменте корпоративных облигаций, рассчитывается по формуле

$$F_2(t) = IFX(t) - G(t, 3),$$

где  $G(t, u)$  – базовая доходность в момент времени  $t$  на срок  $u$ ,

$IFX(t)$  – индекс доходности корпоративных облигаций Interfax-Cbonds.

7.6. Для оценки премии за кредитный риск  $Risk_i(t)$  предлагается воспользоваться значениями кредитных рейтингов «большой тройки» международных рейтинговых агентств.

Такие рейтинги могут присваиваться:

1. эмиссии;
2. гаранту (поручителю);
3. эмитенту.

Пусть  $G_i^1(t)$  – наилучший рейтинг эмиссии,  $G_i^2(t)$  – наилучший рейтинг гаранта,  $G_i^3(t)$  – наилучший рейтинг эмитента.

Итоговый рейтинг  $G_i(t)$ , используемый в расчете величины премии за кредитный риск определяется из следующих принципов:

- 1) Если для облигации определен  $G_i^1(t)$ , то  $G_i(t) = G_i^1(t)$ ;
- 2) Для всех прочих несубординированных облигаций  
 $G_i(t) = \min\{G_i^2(t); G_i^3(t)\}$ .

Определение функции  $\min$  основано на использовании оцифрованных значений градаций рейтинговых шкал (см Приложение 3). При этом, чем выше кредитный рейтинг, тем меньше номер соответствующей градации шкалы.

С каждой градацией  $G$  рейтинговой шкалы связана вероятность дефолта  $PD$ . Будем считать, что  $G$  – это номер градации рейтинговой шкалы (см. Приложение 3). При этом известно, что шкалы международных рейтинговых агентств устроены таким образом, что логарифм вероятности дефолта линейно связан с номером градации рейтинговой шкалы:

$$\ln(PD) = a + bG \quad ,$$

или

$$PD = \exp(a + bG),$$

где  $a$  и  $b$  -некоторые коэффициенты.

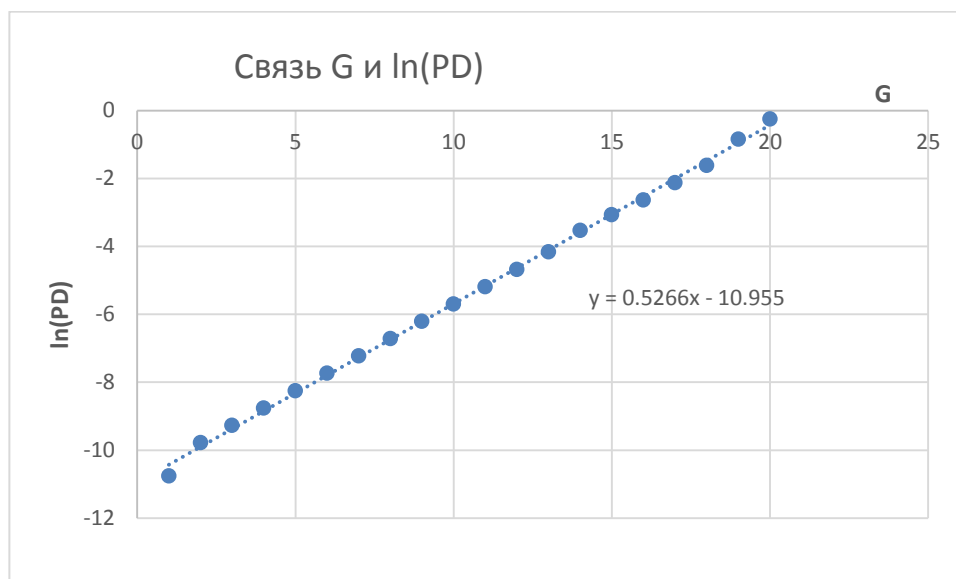
Пусть  $G_0$  – «типичный» рейтинг российских эмитентов из корпоративного сектора рынка, тогда

$$\frac{PD}{PD_0} = e^{b(G-G_0)},$$

или

$$PD = PD_0 e^{b(G-G_0)},$$

где  $PD_0$  – вероятность дефолта, свойственная рейтингу градации  $G_0$ .



Как известно, грубой оценкой вероятности дефолта является спред облигации к базовой кривой процентных ставок, но величину спреда для «типичного» российского эмитента мы уже оценили – он равен второму фактору Фамы-Френча. Поэтому  $PD_0$  с точностью до коэффициента пропорциональности задается величиной  $F_2(t)$ .

Следовательно,  $PD \sim F_2(t) e^{b(G-G_0)} = F_2(t) e^{bG} e^{-bG_0}$ .

Т.к. величина  $e^{-bG_0}$  является константой, то  $PD \sim F_2(t) e^{bG}$ .

Исходя из этих соображений и с учетом того, что премия за кредитный риск входит в факторную модель с точностью до коэффициента пропорциональности, а вероятность дефолта до погашения облигации примерно равна  $Du_i PD$ , премию за кредитный риск предлагается определить по формуле:

$$Risk_i^b(t) = F_2(t) Du_i e^{bG},$$

где  $Du_i$  - дюрация облигации.

Включение в явном виде спреда в расчет премии за риск позволит учесть влияние фазы экономического цикла на данную величину.

Оценка величины коэффициента  $b$  производится в рамках оценки общей совокупности параметров регрессионной модели на основе алгоритма Левенберга — Марквардта.

- 7.7. Для рынка облигаций свойственен так называемый эффект “on the run”, когда облигации с относительно небольшим сроком после размещения торгуются более активно, что влияет на их доходности.

Для учета этого эффекта в факторную модель была добавлена фиктивная переменная  $1\{t - \tau_i < T\}$ , принимающая значения 1 или 0 в зависимости от того, меньше или больше  $T$  дней прошло с момента размещения облигации.

Значение пороговой величины  $T$  предлагается взять равной 120 торговым дням.

- 7.8. Оценка премии за ликвидность облигаций сопряжена с двумя принципиальными трудностями. Во-первых, вторичный рынок облигаций является преимущественно внебиржевым, поэтому весьма сложно собрать статистику по сделкам, которая бы характеризовала активность торгов отдельными бумагами. Во-вторых, даже если бы это удалось сделать, это не помогло бы существенно продвинуться в решении задачи оценки премии за ликвидность. Дело в том, что существенная доля выпущенных российскими эмитентами облигаций (до 2/3 рынка) размещена, что называется, «в одни руки», при этом владельцы таких эмиссий фактически не совершают с ними сделок на вторичном рынке, т.е. торговые обороты для таких бумаг отсутствуют. Вместе с тем, этот факт не отменяет возможности того, что среди таких бумаг много ликвидных облигаций, которые можно в любой момент продать с минимальным дисконтом к их справедливой цене. Так, например, много таких эмиссий облигаций выпустила государственная компания «Роснефть», эти выпуски не торгуются, но на рынке много агентов, готовых купить эти облигации, если такая возможность появится.
- 7.9. В основе второго этапа методики оценки ликвидности облигаций лежит идеология оценки вмененной ликвидности<sup>4</sup>. Данный подход предполагает наличие информации о структуре владения тестовой группы бумаг основной группой инвесторов, присутствующих на рынке. Такая информация может быть получена от Национального расчетного депозитария.

Определение ликвидности инструмента производится в три этапа:

1. Определяются размеры долей тестовых эмиссий, выкупленных отдельными инвесторами.
2. Для каждого такого инвестора определяется средний уровень ликвидности его портфеля (как усреднение показателей ликвидности тестовых бумаг, полученных на первом этапе методики)
3. Рассчитывается показатель ликвидности произвольной облигации как средневзвешенная сумма показателей ликвидности портфелей инвесторов.

Таким образом, оценка ликвидности бумаги производится на основе оценок предпочтений ликвидности покупателей этой бумаги.

<sup>4</sup> см. Bushman, Robert, Anh Le and Florin Vasvari (2009). “Implied Bond Liquidity”, Working Paper, University of North Carolina at Chapel Hill

Основное достоинство использования данного подхода оценки ликвидности заключается в том, что он позволяет стандартным образом получить устойчивые оценки ликвидности фактически всех обращающихся на ОТС рынке ценных бумаг вне зависимости от наличия или отсутствия ценовой информации об истории их торгов.

7.10. Формально описанная выше процедура выглядит следующим образом. Пусть на рынке присутствует  $K$  инвесторов и нам необходимо оценить ликвидность  $N$  облигаций.

Обозначим через  $s_{ij}$  – объем (в денежном выражении)  $i$ -ой облигации, находящийся во владении у  $j$ -го инвестора.

Определим долю владения  $i$ -ой облигации  $j$ -ым инвестором по формуле:

$$w_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sum_{n=1}^K s_{in}} .$$

Также определим долю портфеля  $j$ -ого инвестора, инвестированную в  $i$ -ую облигацию по формуле:

$$v_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sum_{n=1}^N s_{nj}} .$$

Таким образом структуру владения облигаций будет описывать матрица  $W = (w_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,K}}$ ,

а структуру портфелей инвесторов будет описывать матрица

$$V = (v_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,K}} .$$

Элементы этих двух матриц должны обладать двумя очевидными свойствами:

$$\sum_{j=1}^K w_{ij} = 1 \quad , \text{ для любого } i;$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = 1 \quad , \text{ для любого } j.$$

Определим теперь средневзвешенную структуру портфелей инвесторов, инвестирующих в  $i$ -ую облигацию, где усреднение производится относительно структуры владения  $i$ -ой облигации. Данная усредненная структура будет задаваться величинами:

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^K w_{im} v_{jm} .$$

Нетрудно проверить, что так полученные коэффициенты структуры обладают необходимым свойством:

$$\sum_{j=1}^N u_{ij} = 1 .$$

Обозначим через  $U = (u_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,N}}$  матрицу усредненных структур.

Заметим, что матрица  $U$  вычисляется по формуле:

$$U = WV^T, \text{ где } V^T \text{ -транспонированная матрица } V.$$

7.11. Естественным показателем ликвидности облигации является степень диверсифицированности структуры ее владения. Чем большее число инвесторов владеет бумагой, тем больше оснований считать ее ликвидной.

Степень диверсификации структуры владения для  $i$ -ой облигации можно оценить с помощью индекса<sup>5</sup> Херфиндаля-Хиршмана, который определяется по формуле:

$$HHI_i = \sum_{j=1}^K w_{ij}^2.$$

Заметим, что если облигация распределена равными долями между  $M$  инвесторами, то индекс Херфиндаля-Хиршмана для такой облигации примет значение равно  $1/M$ . Если же облигация сосредоточена в руках одного инвестора, то  $HHI = 1$ . Таким образом, чем меньше значение  $HHI$ , тем выше ликвидность облигации.

На основе индекса  $HHI$  определим еще один индекс концентрации  $HHI_i^\delta$  по формуле:

$$HHI_i^\delta = 1\{HHI_i \geq \delta\}, \text{ где } 0 \leq \delta \leq 1.$$

Как видно из определения  $HHI_i^\delta$  он принимает всего два значения 1 или 0, в зависимости от того, выше или ниже порогового уровня  $\delta$  индекс  $HHI_i$ . С учетом того, что данный индекс мы хотим использовать в качестве характеристики ликвидности облигаций, его значения следует интерпретировать, как то, является или не является анализируемая бумага неликвидной. В реальных расчетах предлагается положить  $\delta = \frac{1}{4}$ . Пороговый уровень для определения «неликвидности» в виде  $\frac{1}{4}$  был выбран после обсуждения с экспертами рынка, которые согласились с тем, что бумага может быть ликвидной, если с ней совершают операции хотя бы 3 участника рынка.

Определим для каждой  $i$ -ой бумаги два индекса вмененной ликвидности, отражающих предпочтения по ликвидности инвесторов в соответствующую бумагу.

$$IL_i^1 = \sum_{j=1}^K u_{ij} HHI_j,$$

$$IL_i^2 = \sum_{j=1}^K u_{ij} HHI_j^\delta.$$

Первый индекс  $IL_i^1$  показывает средний уровень значения индекса  $HHI$  в портфеле «типичного» инвестора в  $i$ -ую облигацию.

Второй индекс  $IL_i^2$  показывает средний уровень значения индекса  $HHI_i^\delta$  в портфеле «типичного» инвестора в  $i$ -ую облигацию. При этом его также можно интерпретировать как долю заведомо неликвидных бумаг (со значением  $HHI_i \geq \frac{1}{4}$ ) в портфеле «типичного» инвестора в  $i$ -ую облигацию.

Индекс ликвидности  $HHI_i$  призван учесть при определении справедливой стоимости облигации является ли она активно торгуемой или относится к категории облигаций, размещённых «в одни руки». Индексы ликвидности  $IL_i^1$  и  $IL_i^2$  предназначены для того, чтобы учесть в модели ликвидность бумаг, размещённых «в одни руки».

<sup>5</sup> См. Hirschman, Albert O. (1964). "The Paternity of an Index". The American Economic Review. American Economic Association. 54 (5): 761. JSTOR 1818582



7.12. Оценка коэффициентов  $\varphi_j$ ,  $\beta_k$ ,  $b$  в регрессионном уравнении (5) производится на основе алгоритма Левенберга-Марквардта<sup>6</sup>, который является обобщением метода наименьших квадратов и применяется в том случае, когда объясняемая переменная в регрессионном уравнении нелинейно зависит от коэффициентов модели (в нашем случае от коэффициента  $b$ ). Оценивание параметров модели производится на основе статистики наблюдений торгуемых на бирже z-спредов облигаций. При этом наблюдения входят в расчет коэффициентов регрессии с весовыми коэффициентами  $\omega_i$ :

$$\omega_i = \frac{Du_i(t)^2}{m_i},$$

где  $Du_i(t)$  – дюрация  $i$ -ой облигации,  $m_i$  – количество дней, для которых имеется статистика биржевых торгов для  $i$ -ой облигации.

Использование таких коэффициентов регрессии позволяет обеспечить равномерную точность оценки стоимостей облигаций во всем диапазоне дюраций и для всех бумаг вне зависимости от активности их торгов.

Действительно, если через  $z_i$  обозначить наблюдаемое значение спреда, а  $\hat{z}_i$  его оценку, на основе факторной модели, то метод Левенберга-Марквардта заключается в минимизации взвешенной суммы квадратов разностей:

$$\sum \omega_i (z_i - \hat{z}_i)^2.$$

Откуда получаем, что

$$\sum \omega_i (z_i - \hat{z}_i)^2 = \sum \frac{1}{m_i} (Du_i (z_i - \hat{z}_i))^2 \approx \sum \frac{1}{m_i} \left( \frac{P_i - \hat{P}_i}{P_i} \right)^2,$$

где  $P_i$  и  $\hat{P}_i$  – наблюдаемые и оцененные на основе факторной модели стоимости облигаций.

Именно использование весов  $\omega_i$  позволяет нам одинаковую точность оценки стоимостей для всех облигаций, которая характеризуется стандартным отклонением  $\sigma$ , оцениваемым по формуле

$$\sigma^2 = \frac{\sum \omega_i (z_i - \hat{z}_i)^2}{\sum \frac{1}{m_i}}$$

7.13. После того как мы произвели оценку спреда облигации на основе соотношения (5) мы можем определить справедливую стоимость  $P_i^3(t)$  облигации в соответствии с методом факторного разложения цены по формуле:

$$P_i^2(t) = \frac{100}{Nom} \sum_k \frac{CF_k}{(1 + G(t, t_k) + \hat{z}_i(t))^{t_k}} - A$$

где  $A$  – накопленный купонный доход (НКД) облигации, выраженный в процентах от ее номинальной стоимости,

<sup>6</sup> См. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация = Practical optimization. — М.: Мир, 1985.

$Not$  – непогашенная часть номинальной стоимости облигации,

$k$  – порядковый номер денежного потока,

$CF_k$  -  $k$ -й денежный поток по облигации - включает купонные, амортизационные платежи, погашение остаточной номинальной стоимости (для облигаций с плавающей ставкой купона величина купонных платежей приравнивается величине последнего и звестного купона),

$G(\cdot)$  – кривая базовых доходностей,

$t_k$  – срок до даты  $k$ -го денежного потока в годах.

6.13. Точность оценки справедливой стоимости облигации на основе факторного разложения цены определяется соотношением:

$$R_i^3(t) = 2k_\theta\sigma .$$

где  $k_\theta$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $\frac{1}{2}(\theta + 1)$ ,

$$\text{т.е. } \frac{1}{2}(\theta + 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_\theta} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz .$$

## 8. Перечень основных обозначений

$P_i^j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  – справедливые стоимости  $j$ -ой облигации, рассчитанные на основе трех методов, на момент времени  $t$ .

$\theta$ - доверительная вероятность, определяющая интервалы допустимых значений справедливых цен.

$K_{min}$ - минимальное количество сделок с облигацией в течение предыдущих 250 торговых дней;

$R_{max}$ - максимальная погрешность, с которой может определяться справедливая стоимость облигации в рамках данной Методики. Данный показатель ограничивает в процентном выражении максимальное допустимое отклонение оценки справедливой цены от ее реального значения.

$Y_i(t)$  – доходность для  $i$ -ой облигации,

$I(t)$  – облигационный индекс.

$Du_i(t)$  - дюрации соответствующих облигаций.

$G(t, u)$  – базовая доходность в момент времени  $t$  на срок  $u$ ,

$y_i(t)$  . спред к базовой ставке.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Оценка базовой кривой доходности

### Термины и определения

#### Общие понятия

1. База расчета — список государственных облигаций, данные о ходе торгов по которым используются для расчёта G-кривой.
2. Бескупонная доходность — доходность к погашению дисконтной облигации
3. Кривая бескупонной доходности (КБД) — зависимость бескупонной доходности от срока дисконтной облигации для однородных долговых обязательств; функция, задающая срочную структуру процентных ставок
4. Момент времени — число, равное количеству дней, прошедших от выбранной точки начала отсчета, выраженное в днях.

#### Срочная структура процентных ставок

1. Текущий момент времени, измеряется в годах

$$s$$

2. Момент в будущем, на который производится прогноз, измеряется в годах

$$t \geq s$$

3. Процентная ставка (бескупонная доходность, действующая в момент  $s$  на момент  $t$ )

$$r_s(t)$$

4. Коэффициент дисконтирования

$$D_s(t) = [1 + r_s(t)]^{t-s}$$

5. Непрерывная процентная ставка

$$y_s(t) = \frac{\log[D_s(t)]}{t-s}$$

6. Форвардная ставка (мгновенная)

$$f_s(t) = \frac{d}{dt}[y_s(t) \cdot (t-s)]$$

7. Предельная форвардная ставка, равная долгосрочному прогнозу номинальной ставки<sup>7 8</sup>

$$\omega = \log[(1 + (3.0 + 4.4)\%) ] = 7.14\%$$

<sup>7</sup> Консервативный долгосрочный прогноз

МЭР([http://economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/doc20131108\\_5](http://economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/doc20131108_5)) ожидаемой инфляции на 2030 год составляет 2.0%, умеренно-оптимистичный 2.2%, целевой 3.0%. ЦБ РФ установил целевой уровень инфляции на 2017 в 4.0% и планирует и дальше его удерживать.

<sup>8</sup> Прогноз ЦБ реальной ставки процента [http://www.cbr.ru/analytics/wps/wps\\_13.pdf](http://www.cbr.ru/analytics/wps/wps_13.pdf)

8. Приведенный коэффициент дисконтирования

$$d_s(t) = e^{\omega(t-s)} D_s(t)$$

### Функция ядра $Z$

1. Параметр скорости сходимости

$$\alpha = 0.05$$

2. Функция ядра

$$Z(u, v) = \alpha \min(u, v) - 0.5(e^{-\alpha|u-v|} - e^{-\alpha(u+v)})$$

### Матрицы и векторы

1. Везде далее матрицы и векторы выделяются жирным шрифтом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2. Операция транспонирования определена для матриц и векторов

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}^* = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

3. Операции сложения матрицы или вектора со скалярной переменной являются поэлементными

$$\mathbf{A} + b = \begin{bmatrix} a_{11} + b & a_{12} + b & \dots & a_{1n} + b \\ a_{21} + b & a_{22} + b & \dots & a_{2n} + b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b & a_{m2} + b & \dots & a_{mn} + b \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} + b = \begin{bmatrix} a_1 + b \\ a_2 + b \\ \vdots \\ a_m + b \end{bmatrix}$$

4. Операция сложения матрицы и вектора производится <<по вектору>>

$$\mathbf{A} + \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_{11} + c_1 & a_{12} + c_1 & \dots & a_{1n} + c_1 \\ a_{21} + c_2 & a_{22} + c_2 & \dots & a_{2n} + c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + c_m & a_{m2} + c_m & \dots & a_{mn} + c_m \end{bmatrix}$$

5. Операции умножения матрицы на матрицу, вектор или скаляр определены канонически.

6. Скалярные операции, производимые поэлементно над компонентами матрицы или вектора, обозначаются квадратными скобками

$$\exp[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \exp(a_1) \\ \exp(a_2) \\ \vdots \\ \exp(a_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} \\ e^{a_2} \\ \vdots \\ e^{a_m} \end{bmatrix}$$

7. Скалярные операции от двух переменных, производимые поэлементно над компонентами двух векторов, обозначаются квадратными скобками

$$F[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} F(a_1, b_1) & F(a_1, b_2) & \dots & F(a_1, b_n) \\ F(a_2, b_1) & F(a_2, b_2) & \dots & F(a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(a_m, b_1) & F(a_m, b_2) & \dots & F(a_m, b_n) \end{bmatrix}$$

8. Операция получения квадратной матрицы с диагональными элементами от вектора  $\mathbf{a}$  обозначается

$$\text{diag}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

### Порядок формирования базы расчетов

1. В базы расчетов заведомо не включаются выпуски, содержащие не фиксированный размер или дату выплаты. Таким образом, для каждой бумаги из базы расчетов должны быть известны размеры всех купонных выплат (в том числе амортизаций и погашений), а также даты запланированных выплат.
2. В базе расчетов должны быть использованы выпуски, для которых частота одновременно наблюдаемых котировок со стороны заявок на продажу и со стороны заявок на покупку не меньше 80%. В модели используются данные соответствующих лучших цен. Если одна из цен не установлена, то цена на бумагу считается ненаблюдаемой.
3. Из базы расчетов исключаются выпуски со сроком до погашения менее 30 дней.

### Непараметрическая модель

Непараметрическая модель допускает две возможных поставки, результатом которых является описываемая форма кривой.

### Функциональная постановка

1. В основе функциональной постановки лежат два базовых предположения относительно свойств (вида, формы) функции дисконтирования.
  1. Кривая должна обладать определенной степенью гладкости.
  2. Динамика кривой должна быть достаточно гладкой, то есть текущая кривая должна быть близка (в некотором смысле) к прогнозу, полученному на предыдущем шаге расчетов.
2. Оба требования к кривой могут быть формализованы в виде задачи минимизации в среднем взвешенной суммы квадратов второй и первой производных от невязки прогноза и текущего значения функции дисконтирования.
3. Помимо предположения о форме функции дисконтирования используется допущение о том, что наблюдаемые значения цен определены неточно.
4. Наблюдаемые цены не обязаны в точности совпадать с ценами теоретическими, рассчитанными по функции дисконтирования. Данное

предположение может быть формализовано в виде задачи минимизации взвешенного квадрата невязки цен с использованием меры точности.

5. На каждом шаге расчета решается задача многокритериальной (двухкритериальной) оптимизации.
  1. Первый критерий состоит в гладкости и сходимости кривой.
  2. Второй критерий состоит в близости наблюдаемых цен и теоретических цен.
6. Для решения задачи применяется метод множителей Лагранжа. В такой постановке задача допускает аналитическое решение, формальной записью которого является кривая описываемой непараметрической модели.

### **Вероятностная постановка**

1. В основе вероятностной постановки лежит предположение о случайности поведения форвардной ставки.
2. Форвардная ставка представляется в виде двумерного стационарного Гауссовского случайного поля.
  1. Первая переменная поля определяет момент времени, в который производится прогноз.
  2. Вторая переменная определяет тот момент времени, на который производится прогноз.
3. При фиксированной первой переменной (что есть в некоторый заданный момент времени) форвардная ставка является Гауссовским процессом.
4. Относительно этого Гауссовского процесса делается предположение о том, что он является процессом Орнштейна-Уленбека, таким образом, подчиняется модели Вайсичека.
5. При фиксированной второй переменной делается предположение о том, что процесс, полученный в данном сечении, является броуновским движением.
6. Наблюдаемые цены содержат случайную ошибку, являющуюся несмещенным белым шумом.
7. В каждый момент времени прогнозируемая форвардная кривая подчиняется модели Вайсичека, а динамика прогноза во времени является броуновским движением. Наблюдаемые цены содержат случайную несмещенную ошибку.
8. На основании данных предположений, а также допуская разложение функции дисконтирования в ряд Тейлора до линейного члена, строится вероятностная постановка, к которой в явном виде применим фильтр Калмана.

### **Обработка данных**

1. Для расчета срочной структуры процентных ставок используется информация о заявках, поданных в Режиме основных торгов с выпусками, включенными в базу расчета.

2. Моментом фиксации заявок  $s_n$  является начало следующего (астрономического) часа внутри торгового дня.
3. Цены облигаций определяются после обработки последней сделки, совершенной до момента фиксации.
4. В момент  $s_n$  фиксируются активные заявки по каждому из выпусков, входящих в базу расчета. Если по некоторому выпуску  $i$  имеются заявки на покупку, то определяется цена покупки  $bid_i$ , как наибольший ценовой уровень заявок на покупку.
5. Аналогично фиксируется цена продажи  $ask_i$ , как наименьший ценовой уровень заявок на продажу.
6. Цена продажи и цена покупки выражаются в процентах от непогашенной части номинальной стоимости облигации и учитывают накопленный купонный доход.
7. В момент фиксации  $s_n$  выпуск считается ненаблюдаемым, если одна из двух цен отсутствует.
8. Для наблюдаемых выпусков расчет средней цены производится с использованием цены продажи и цены покупки

$$p_i = 0.5(ask_i + bid_i)$$

9. Для предыдущего торгового дня определяется дневной параметр меры точности выпуска, как медианное значение спреда в результате измерений предыдущего торгового дня:

$$m_i^{(\text{prev day})} = 0.5(\text{median}(ask_i^{(\text{prev day})} - bid_i^{(\text{prev day})}))$$

10. На основании полученной в предыдущий момент фиксации цен  $s_{n-1}$  меры точности выпуска  $\delta_i$  для выпуска  $i$  новая мера точности выпуска определяется с использованием экспоненциального фильтра с параметром  $\theta = 0.95$

$$\delta_i = \theta \cdot \delta_i + (1 - \theta) \cdot m_i^{(\text{prev day})}$$

11. Определяется мера точности наблюдаемой цены

$$q_i = \max(\delta_i, 0.5(ask_i - bid_i))$$

### Матричное представление данных

1. На момент фиксации заявок
  1. Известно количество  $k$  выпусков, для которых наблюдаются цены. Все остальные выпуски в процедуре пересчета не участвуют.
  2. Для каждой облигации определена цена  $p_i, i = 1 \dots k$ . Упорядоченные цены облигаций образуют вектор цен  $\mathbf{p}$  размерности  $k \times 1$ .
  3. Для каждой облигации определена мера точности  $q_i, i = 1 \dots k$ . Упорядоченные в соответствии с ценами облигаций элементы  $q_i$  образуют вектор меры точности  $\mathbf{q}$  размерности  $k \times 1$ .



4. Суммарное количество уникальных (без повторений) дат будущих выплат по всем облигациям равно  $m$ .
  5. Объединением всех дат выплат по всем облигациям обозначается  $u_j, j = 1 \dots m$ . Таким образом, для любого  $j = 1 \dots m$  существует как минимум один выпуск с выплатой в момент  $u_j$ . Упорядоченные даты выплат образуют вектор  $\mathbf{u}$  размерности  $m \times 1$ .
  6. Матрица выплат  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  размерности  $m \times k$  задается поэлементно
    - a. Если для выпуска  $i$  на дату  $u_j$  не существует выплаты, то  $c_{ij} = 0$ ;
    - b. Если для выпуска  $i$  на дату  $u_j$  существует выплата,  $c_{ij}$  равно величине данной выплаты по облигации, выраженной в процентах от непогашенной части номинальной стоимости облигации.
2. На момент фиксации цен  $s_n$  внешними входными переменными являются  $\mathbf{u}, \mathbf{C}, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n$ .
  3. Внутренними входными переменными являются
    1. вектор дат прогноза  $\mathbf{t}$ ,
    2. предшествующий момент фиксации цен  $s_{n-1}$ ,
    3. вектор  $\mathbf{d}_{n-1}$  приведенной функции дисконтирования в точках  $\mathbf{t}$ ,
    4. ковариационная матрица  $\mathbf{R}_{n-1}$  приведенной функции дисконтирования в точках  $\mathbf{t}$ .
  4. Инициализация внутренних входных переменных
    1. Расчет функции дисконтирования производится дискретно. Для реализации фильтра Калмана необходимо определить временную сетку  $\mathbf{t}$  — вектор дат в будущем, для которого будет производиться расчет значений кривой. Размерность вектора равна  $l \times 1$ . Для получения достаточно точного результата желательно, чтобы в вектор входили все даты выплат по облигациям из базы расчета ( $\mathbf{u} \subset \mathbf{t}$ ). Также желательно иметь как минимум один достаточно большой (более 50 лет) элемент сетки  $\mathbf{t}$  для обеспечения точной интерполяции кривой в случае появления выпусков с дальними датами выплат.
    2. Начальный вектор приведенных коэффициентов дисконтирования  $\mathbf{d}_0$  размерности  $l \times 1$  заполняется единицами.
    3. Начальная матрица ковариации  $\mathbf{R}_0$  размерности  $l \times l$  заполняется нулями.
    4. Параметр  $s_0$  определяется минимальным ( $s_0 < s_1$ ) при условии, что рассчитанные модельные (теоретические) значения цен на первом

шаге отличались от наблюдаемых цен не более, чем на величину половины bid-ask спреда<sup>9</sup>

$$|p_1 - C^* D_1[\mathbf{u}]| \leq q_1$$

5. Постоянными входными параметрами являются  $\alpha, \omega$  и параметр сглаживания

$$\lambda = 1000$$

6. Результатами работы процедуры пересчета кривой дисконтирования являются:

1. вектор новых значений  $\mathbf{d}_n$  приведенной функции дисконтирования в точках  $\mathbf{t}$ ,
2. новая ковариационная матрица  $\mathbf{R}_n$  приведенной функции дисконтирования в точках  $\mathbf{t}$ .

### Расчет непараметрической модели

1. Приведенная матрица выплат на дату  $s_n$  определяется по формуле

$$\mathbf{Q}_n = \text{diag}(\exp[-\omega(\mathbf{u} - s_n)]) \cdot \mathbf{C}.$$

2. Ковариационная матрица ошибок имеет вид

$$\mathbf{N}_n = \lambda \cdot \text{diag}(\mathbf{q})$$

3. Ковариационная функция шага динамики имеет вид

$$M_n(t_1, t_2) = \frac{(s_n - s_{n-1})}{\alpha^2} \cdot Z(t_1 - s_n, t_2 - s_n)$$

4. Согласно непараметрической модели, уравнения шага динамики и измерения приведенной случайной функции дисконтирования  $d_n(t)$  в момент  $s_n$  на произвольную дату  $t$  имеют вид<sup>10</sup>

$$\begin{cases} d_n(t) = 1 + d_{n-1}(t) - d_{n-1}(s_n) + v_n(t) \\ \mathbf{p}_n = \mathbf{Q}_n^* d_n[\mathbf{u}] + \mathbf{e}_n \end{cases}$$

5. с начальным условием  $d_0(t) \equiv 1$ . Случайные переменные имеют распределение

$$\begin{cases} v_n(t) \sim \mathcal{N}(0, M_n(t, t)) \\ \mathbf{e}_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{N}_n) \end{cases}$$

6. Для расчета шага динамики фильтра Калмана используется интерполяция среднего приведенной функции дисконтирования  $d_{n-1}(t)$  и ее ковариационной матрицы  $R_{n-1}(t, t)$  на секте  $\mathbf{t}$  по их дискретной аппроксимации  $\mathbf{d}_{n-1}$  и  $\mathbf{R}_{n-1}$  соответственно. Рассчитываются следующие значения

$$d_{n-1}(s_n), R_{n-1}(s_n, s_n), R_{n-1}[\mathbf{t}, s_n], R_{n-1}[s_n, \mathbf{t}].$$

<sup>9</sup> Модель предполагает, что производится предварительный расчет на исторических данных для более точной работы в будущем. Поэтому при наличии глубокой истории допускается произвольный выбор данного параметра при условии  $s_1 - 60 < s_0 < s_1 - 1$

<sup>10</sup> Данные формулы носят теоретический характер, в расчетах не применяются

7. Шаг динамики состоит в вычислении прогноза вектора коэффициентов дисконтирования  $\mathbf{d}_{n-0}$  и матрицы ковариации  $\mathbf{R}_{n-0}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n-0} &= 1 + \mathbf{d}_{n-1} - d_{n-1}(s_n) \\ \mathbf{R}_{n-0} &= \mathbf{R}_{n-1} - R_{n-1}[\mathbf{t}, s_n] - R_{n-1}[s_n, \mathbf{t}] + R_{n-1}(s_n, s_n) + M_n[\mathbf{t}, \mathbf{t}] \end{aligned}$$

8. Аналогично для расчета этапа измерения фильтра Калмана используется интерполяция прогноза среднего приведенной функции дисконтирования  $d_{n-0}(t)$  и ее ковариационной матрицы  $R_{n-0}(t, t)$  на секте  $\mathbf{t}$  по их дискретной аппроксимации  $\mathbf{d}_{n-0}$  и  $\mathbf{R}_{n-0}$  соответственно. Рассчитываются следующие значения

$$d_{n-0}[\mathbf{u}], R_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}], R_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}], R_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{t}].$$

9. Этап измерения состоит в вычислении вектора коэффициентов дисконтирования  $\mathbf{d}_n$  и матрицы ковариации  $\mathbf{R}_n$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_n &= \mathbf{d}_{n-0} + R_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n [\mathbf{Q}_n^* R_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n + \mathbf{N}_n]^{-1} (\mathbf{p}_n - \mathbf{Q}_n^* \mathbf{d}_{n-0}[\mathbf{u}]) \\ \mathbf{R}_n &= \mathbf{R}_{n-0} + R_{n-0}[\mathbf{t}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n [\mathbf{Q}_n^* R_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \mathbf{Q}_n + \mathbf{N}_n]^{-1} \mathbf{Q}_n^* R_{n-0}[\mathbf{u}, \mathbf{t}] \end{aligned}$$

10. После фиксации цен в момент  $s_n$  для получения значений доходности на дату  $\tau$  производится интерполяция функции  $d_n(\tau)$  по её дискретной аппроксимации  $\mathbf{d}_n$ , заданной в точках  $\mathbf{t}$ . Откуда значение функции дисконтирования на моменты  $\tau$  равно

$$D_n(\tau) = e^{-\omega(\tau-s_n)} d_n(\tau)$$

11. Значение бескупонной доходности, действующей в момент  $s_n$  на момент  $\tau$  равно

$$r_n(\tau) = e^{-\omega} \cdot (d_n(\tau))^{(\tau-s_n)^{-1}} - 1.$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Классификатор отраслей**

<b>№</b>	<b>Отрасль</b>
1	Государство
2	Муниципалитеты
3	Банки
4	Горнодобыча
5	Машиностроение
6	Металлургический
7	Нефтегазовый
8	Пищевая промышленность и с/х
9	Ритейл
10	Строительство
11	Телекоммуникации
12	Технологии
13	Транспорт
14	Финансовые сервисы
15	Химическая промышленность и минудобрения
16	Электроэнергетика

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Сопоставление шкал рейтинговых агентств и вероятности дефолта

№	FITCH, S&P	Moody's	PD	Ln(PD)
1	AAA	Aaa	2,12E-05	-10,7626
2	AA+	Aa1	5,65E-05	-9,78194
3	AA	Aa2	9,41E-05	-9,27145
4	AA-	Aa3	0,000157	-8,76096
5	A+	A1	0,000261	-8,25047
6	A	A2	0,000435	-7,73997
7	A-	A3	0,000725	-7,22948
8	BBB+	Baa1	0,001208	-6,71899
9	BBB	Baa2	0,002012	-6,20849
10	BBB-	Baa3	0,003353	-5,698
11	BB+	Ba1	0,005586	-5,18751
12	BB	Ba2	0,009307	-4,67702
13	BB-	Ba3	0,015506	-4,16652
14	B+	B1	0,029392	-3,52703
15	B-	B2	0,046601	-3,06613
16	B	B3	0,071716	-2,63505
17	CCC+	Caa1	0,119486	-2,12455
18	CCC	Caa2	0,199078	-1,61406
19	CCC-	Caa3	0,429658	-0,84477
20	CC	Ca	0,776426	-0,25305
21	C			
22	DDD	C	0,966176	-0,03441
22	SD			
22	DD			
22	D		0,995	-0,00501

## КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

### «ИНТЕРФАКС-ЦЭА»

Россия, 127006, Москва, 1-я Тверская-Ямская, д. 2, стр. 1

Тел. +7 (495) 647 8850

Факс +7 (499) 256 2520

E-mail: [buzdalin@interfax.ru](mailto:buzdalin@interfax.ru)

Web: [www.interfax.ru](http://www.interfax.ru)

**«Интерфакс-ЦЭА»** - аналитический центр группы "Интерфакс", оказывающий аналитические услуги различным отраслям экономики и государственным структурам, включая такие сервисы, как поддержка привлечения прямых инвестиций в регионы России, подготовку ведущих информационно-аналитических продуктов о банковском и страховом рынке России и стран СНГ – Интерфакс-100 и Интерфакс-1000.

**"Интерфакс-ЦЭА"** готовит регулярные статистические и аналитические продукты по различным сегментам финансового рынка России и стран СНГ, предоставляет информацию о деятельности российских институциональных инвесторов. Среди продуктов компании - ежедневные прогнозы и отчеты о состоянии различных сегментов финансового рынка, рэнкинги российских банков и страховых компаний, выпускаемые под брендом "Интерфакс-100", и а также рэнкинги банков и страховых компаний стран СНГ - "Интерфакс-1000".



**Международная информационная Группа "Интерфакс" (Interfax Information Services Group)** создает информационные продукты и средства коммуникации для принятия решений в политике и бизнесе. Группа, основанная в 1989 г., объединяет сеть национальных, региональных и отраслевых информационных агентств, работающих в России, других странах СНГ, в Китае, Центральной Европе. В "Интерфакс" ([www.interfax.com](http://www.interfax.com), [www.interfax.ru](http://www.interfax.ru)) входят компании и подразделения, предоставляющие новости, аналитические услуги, рыночные данные, фундаментальную информацию, разрабатывающие программные решения.

Настоящий материал является интеллектуальной собственностью компании ЗАО "Интерфакс".

Все интеллектуальные права Компании охраняются в соответствии с законодательством Российской Федерации. Ни одна часть этого материала не может продаваться, воспроизводиться или распространяться без письменного согласия Компании. Вся информация, содержащаяся в настоящем материале, получена "Интерфакс" из источников, которые Компания считает достоверными. В связи с возможностью технической ошибки или ошибки персонала, а также других факторов Компания не гарантирует абсолютной надежности представленной информации. Любые суждения, содержащиеся в материале, должны рассматриваться исключительно как мнение экспертов Компании, а не как рекомендация по покупке или продаже ценных бумаг / инвестиционных паев или по использованию каких-либо финансовых инструментов.